PREMIERE INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Nota : Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

---

1) Soit M la matrice réelle d'ordre $n \geqslant 1$ dont tous les éléments sont nuls sauf les n nombres $m_{i,i}$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les nombres $m_{i,i+1}$, qui sont tous égaux à 1.

a) Calculer M^k où k est un entier positif ou négatif.

b) Calculer le polynôme caractéristique $\delta_M(X) =$dét$(M - XI)$ de M.

c) Pour quelles valeurs de n la matrice M est–elle diagonalisable ?

d) Déterminer l'ensemble des matrices N telles que $MN = NM$.

---

2) a) Tracer, dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, la courbe d'équation $y = P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 15x + 18$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(x) = 0$.

c) Retrouver les résultats de la question précédente à partir du fait que deux des racines de P ont 6 comme produit.

---

3) Soient a, b et c trois nombres complexes. Quelles relations doivent lier ces trois nombres pour que les images dans le plan complexe des racines (z_1, z_2, z_3) du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$ forment, avec l'origine O, un carré ?

---

4) Soit (u_n) une suite d'entiers positifs ou nuls vérifiant, pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} > u_p$ où $p = u_n$.

a) Que peut–on dire d'un indice k tel que u_k soit la plus petite valeur prise par la suite ?

b) En déduire que $u_n > u_0$ pour tout n strictement positif.

c) Montrer que, pour tout entier n, la relation $u_m > u_n$ est vraie pour tous les indices m strictement supérieurs à n et que la relation $u_m \geqslant m$ est vraie pour tous les entiers m inférieurs ou égaux à n (on pourra introduire un indice k tel que u_k soit le plus petit entier de la forme u_m avec $m > n$).

d) En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante et qu'il n'existe qu'une seule suite (u_n) vérifant l'hypothèse, dont on explicitera les valeurs.

---

5) Soit $ABCDE$ un polygone régulier convexe d'un plan euclidien. Calculer le rapport des longueurs AI et AJ où I et J sont respectivement les intersections du segment AC avec les segments BD et BE.

Donner une équation du second degré, à coefficients entiers, ayant ce nombre pour racine.

---

6) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!(p+1)!}$.
